

M A T E M A T I K A A2

Upřesněné požadavky ke zkoušce v LS 2021-22.

Před zkouškou je nutné získat zápočet ze cvičení, bez uděleného zápočtu, zapsaného v SISu, nebude student ke zkoušce připuštěn.

Průběh zkoušky:

Zkouška z matematiky A2 má dvě části - písemnou a ústní.

Písemná část zkoušky trvá dvě hodiny a řeší se v ní tyto úlohy :

1. příklad z lineární algebry:

- řešení soustav lineárních algebraických rovnic Gaussovou metodou;
- řešení soustav lineárních rovnic užitím inverzní matice;
- výpočet determinantu matice, užití determinantu;
- vyšetřování lineární závislosti, resp. nezávislosti skupiny vektorů; určení báze R^n ;
- vyšetřování lineárních zobrazení z R^n do R^m .

2. Nalezení řešení lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty (obecného řešení i řešení zadané počáteční úlohy).

3. Vyšetření základních vlastností funkce dvou proměnných (definiční obor, spojitost, diferencovatelnost funkce), výpočet parciálních derivací, jejich užití k nalezení totálního diferenciálu funkce, lineární aproximaci funkce a rovnice tečné roviny ke grafu funkce dvou proměnných, vyšetření existence lokálních nebo absolutních extrémů funkce dvou proměnných (v jednoduchých případech);

4. Výpočet a aplikace dvojného nebo trojného integrálu.

5. Aspoň jeden z následujících dvou příkladů (můžete si vybrat jen jeden, ale můžete řešit i oba):

- a) vyšetření existence funkce, definované implicitně zadanou rovnicí v okolí daného bodu, výpočet a užití derivací implicitní funkce (k lineární aproximaci implicitní funkce nebo k vyšetření lokálního extrému funkce dvou proměnných, definované implicitně).

nebo

- b) výpočet křivkového integrálu skalární nebo vektorové funkce; nebo ověření potenciálnosti daného vektorového pole a výpočet potenciálu daného potenciálního vektorového pole.

U každé úlohy v testu jsou i „jednoduché“ otázky, ověřující znalost definic a základních vět z probrané látky, která souvisí se zadaným příkladem.

Ústní část zkoušky:

Pro postup k ústní části zkoušky je třeba získat z písemné části zkoušky alespoň polovinu bodů z možného maxima bodů (do maxima bodů se počítá jen jeden ze dvou pátých příkladů).

Posluchač dostane k nahlédnutí opravený test, může si pak připravit návrhy, jak opravit případné chyby v testu. Odpověďmi na další dvě „teoretické otázky“ si pak může posluchač zlepšit známku, která odpovídá bodům, získaným z testu.

A zde je souhrn toho, co je třeba z Matematiky A2 znát:

1. Předpokládá se znalost látky z Matematiky A1.

2. Lineární algebra:

vektorový (lineární) prostor obecně: definice, základní pojmy, příklady lineárních prostorů;

n -rozměrný aritmetický vektor, n -rozměrný aritmetický prostor R^n ;

n -rozměrný aritmetický vektor, lineární kombinace vektorů, lineární závislost a nezávislost skupiny vektorů, base a dimenze prostoru R^n ;

matice:

sčítání a násobení matic, ekvivalentní úpravy matice, hodnota matice;

čtvercové matice - regulární a singulární čtvercová matice, inverzní matice – definice, existence, výpočet;

determinant čtvercové matice: definice a vlastnosti, rozvoj determinantu podle řádku nebo sloupce, výpočet determinantu; výpočet inverzní matice pomocí determinantů;

řešení soustav lineárních algebraických rovnic Gaussovou metodou, užitím Cramerova pravidla a pomocí inverzní matice.

lineární zobrazení vektorových prostorů, spec. lineární zobrazení z R^n do R^m a jeho vyjádření pomocí matic;

vlastnosti lineárního zobrazení – zobrazení prosté, na, inverzní;

vlastní čísla a vlastní vektory matice.

3. Diferenciální rovnice:

lineární diferenciální rovnice 2. řádu (obecně) – základní pojmy:

počáteční (Cauchyho) úloha, věta o existenci a jednoznačnosti řešení počáteční úlohy pro lineární;

obecné řešení lineární diferenciální rovnice 2. řádu, řešení homogenní rovnice (dimenze lineárního prostoru řešení, fundamentální systém řešení a obecné řešení rovnice bez pravé strany), řešení rovnice s pravou stranou -metoda variace konstant;

lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty:

charakteristická rovnice, fundamentální systém řešení a obecné řešení rovnice bez pravé strany;

partikulární a obecné řešení rovnice s pravou stranou, nalezení partikulárního řešení metodou variace

konstant a odhad partikulárního řešení pro speciální pravé strany; nalezení řešení počáteční úlohy;

aplikace lineárních diferenciálních rovnic 2. řádu;

nepovinné - soustavy lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty a nulovými pravými stranami.

4. Diferenciální počet funkcí více proměnných:

metrický prostor R^n ;

metrika, okolí bodu, konvergence posloupnosti bodů v R^n , množina otevřená, uzavřená, hranice množiny,

hromadný bod množiny, uzávěr množiny, souvislá množina, oblast;

skalární a vektorová funkce více reálných proměnných: definiční obor, příklady;

limita a spojitost - základní věty o limitách a spojitosti, vlastnosti spojitých funkcí;

parciální derivace - definice, základní věty a výpočet, záměnnost parciálních derivací vyšších řádů;

diferencovatelnost funkce, totální diferenciál funkce - definice, geometrický smysl (tečná rovina ke grafu

funkce dvou proměnných), lineární aproximace funkce, souvislost mezi diferencovatelností funkce a

existencí parciálních derivací, postačující podmínka pro diferencovatelnost funkce;

gradient funkce; definice derivace ve směru;

věta o derivaci složené funkce více proměnných –vzorec pro výpočet derivace ve směru (pro funkce

diferencovatelné), věta o derivování složených funkcí více proměnných, užití věty o derivování

složených funkcí pro transformaci diferenciálních operátorů při změně souřadnic;

věta o implicitní funkci jedné i více proměnných - výpočet derivací funkce, dané implicitně; aproximace implicitně definované funkce Taylorovým polynomem 1. nebo 2. stupně; rovnice tečny ke křivce, dané rovnicí $F(x,y) = 0$ a tečné roviny k ploše, dané rovnicí $F(x,y,z) = 0$;
extrémy funkcí více proměnných - globální extrém funkce na dané množině, lokální extrém, nutná podmínka pro lokální extrém, postačující podmínka pro existenci lokálního extrému u funkcí dvou proměnných; globální extrémy spojitě funkce dvou proměnných na uzavřené a omezené množině.

5. Dvojný a trojný integrál:

měřitelná množina, definice dvojného a trojného integrálu;
nutná podmínka integrovatelnosti funkce na měřitelné množině, postačující podmínky integrovatelnosti, funkce; základní vlastnosti dvojného a trojného integrálu;
výpočet - Fubiniova věta (převedení dvojného, resp. trojného integrálu na integraci dvojnásobnou, resp. trojnásobnou); věta o substituci (polární, resp. válcové, resp. sférické souřadnice);
užití dvojného a trojného integrálu při výpočtu obsahu rovinné oblasti, objemu a hmotnosti tělesa, (nepovinné – výpočet souřadnic těžiště a momentů setrvačnosti rovinných nebo prostorových hmotných oblastí.)

6. Křivkový integrál:

křivka v R^3 (R^2) - definice, parametrické vyjádření křivky, tečna ke křivce, délka křivky;
křivkový integrál skalární funkce - definice, nutná podmínka existence, postačující podmínky existence, základní vlastnosti, výpočet, aplikace;
křivkový integrál vektorové funkce - definice převedením na křivkový integrál ze skalární funkce, výpočet, vlastnosti;
nezávislost křivkového integrálu vektorové funkce na cestě a potenciální vektorové pole – nutná a postačující podmínka nezávislosti křivkového integrálu na cestě, potenciální vektorové pole, potenciál, výpočet potenciálu, výpočet práce potenciálního pole.

A nezkouší se, ale dobrovolně něco lze napsat jako dodatek ke zkouškovému testu, nebo pohovořit u zkoušky ústní, o nevlastním integrálu nebo o nekonečných řadách:

7. Nevlastní integrál :

definice, pojem konvergence a divergence nevlastního integrálu, kriteria konvergence integrálu z nezáporné funkce (srovnávací, limitní srovnávací kriterium), absolutní konvergence nevlastního integrálu.

8. Nekonečné řady:

nekonečné číselné řady - konvergence, divergence řady, definice součtu nekonečné řady, základní vlastnosti nekonečných řad, nutná podmínka konvergence;
kriteria konvergence řad s nezápornými členy - srovnávací, limitní srovnávací, integrální;
pojem absolutní konvergence;
nekonečné funkční řady - mocninné řady - poloměr konvergence, obor konvergence a základní vlastnosti.

6.5.2022

N.Krylová